

# A Geometria dos Fractais no ensino de Progressões Geométricas

Morgana Bozza\*, Laurete Zanol Sauer\* e Valquíria Villas Boas Gomes Missell\*

## Resumo

O presente trabalho apresenta uma estratégia para o ensino e a aprendizagem de sequências numéricas denominadas Progressões Geométricas, na disciplina de Matemática para o Ensino Médio. Para tanto, são descritas algumas construções, gerando fractais, a fim de evidenciar propriedades de tais sequências. O software GeoGebra é utilizado como recurso tecnológico e a estratégia é a da aprendizagem por questionamento. Espera-se que as atividades abordadas possam auxiliar o trabalho pedagógico de professores atuantes no Ensino Médio, de forma a diminuir a defasagem educacional nessa disciplina, tornando-a mais interessante para os estudantes.

## Palavras-chave

Progressões Geométricas; Fractais; GeoGebra e Aprendizagem por Questionamento.

# The geometry of fractals in teaching progressions Geometric

## Abstract

This paper presents a strategy for teaching and learning about numerical sequences called Progressions Geometric, in Mathematics for High School. To this end, some constructions are described, generating fractals in order to demonstrate properties of such sequences. GeoGebra software is used as a technological resource and strategy is the Inquire Based Learning. It is expected that addressed activities can assist the educational work of teachers working in high school, in order to reduce the educational gap in this discipline, making it more interesting for students.

## Keywords

Progressions Geometric; Fractals; Geogebra; Inquire Based Learning.

## I. INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi planejado como uma proposta para o ensino e a aprendizagem de sequências numéricas, denominadas Progressões Geométricas (PG), tópico do conhecimento matemático, trabalhado no Ensino Médio atual, na 1ª ou 2ª série, de acordo com o currículo de cada instituição escolar.

Muito se fala em nossa sociedade atual sobre a crise no ensino da Matemática, o que segundo Druck [1], quando diz pode ser traduzido como a baixíssima qualidade do ensino básico, principalmente nas escolas públicas. A autora afirma que as avaliações externas realizadas indicam que a maioria dos brasileiros desconhece as quatro operações básicas, implicando assim na defasagem da visão de mundo e na interação destes sujeitos na sociedade.

Os autores Godoy e Santos [2] defendem que o papel da Matemática na educação deve ser repensado, buscando estabelecer um currículo que esteja de acordo com o sistema educativo atual, compreendendo questões culturais e sociais.

Em suas concepções, a reflexão e a formação, quando constantes na vida profissional do professor de Matemática, podem sanar tal dificuldade. Diante de tais apontamentos a proposta apresentada a seguir justifica-se pela possibilidade de contribuir para o aprimoramento profissional dos docentes que reconhecem, na Formação Continuada, uma forma de fazer frente às demandas atuais relativas à educação matemática.

Os autores Schu e Pacini [3] percebem a necessidade de mudar, e buscam apoio nos documentos legais que orientam a educação brasileira para concordar com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio [7], que alertam para a importância do ensino contextualizado, interdisciplinar, desenvolvendo competências e possibilitando a inserção do sujeito no mundo tecnológico. Desta forma, pode-se ir além da busca pela informação, interpretando dados, fazendo uso do que aprende na escola, para além dos muros escolares e também trazendo as aprendizagens cotidianas para o espaço da sala de aula.

† Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS  
E-mails: morgana.bozza@bol.com.br, lzsauer2@gmail.com, vvillasboas@gmail.com

Diante de tais apontamentos e percebendo a necessidade da formação continuada na trajetória profissional do professor, sugerem-se algumas estratégias pedagógicas relacionadas aos fractais, a fim de evidenciar em suas propriedades os conceitos das sequências numéricas (PG). As mesmas fazem parte de um curso de formação continuada para professores de Matemática. Objetiva-se que as atividades promovidas possam ser aplicadas pelos professores no contexto da sala de aula, no Ensino Médio, e que permitam ainda despertar a reflexão sobre a importância do ensino contextualizado, tendo a estratégia Aprendizagem por Questionamento e a utilização do software GeoGebra como recursos pedagógicos com apoio tecnológico.

## II. APRENDIZAGEM POR QUESTIONAMENTO COMO ESTRATÉGIA PARA A APRENDIZAGEM

No campo da educação muito se fala sobre a necessidade da mudança, alterando currículos escolares, a fim de contribuir para a formação de estudantes mais investigativos e críticos. O professor pode ser o centro da mudança, necessitando inicialmente alterar sua visão do ensinar, dando abertura às novas ideias e metodologias de ensino.

Esta proposta de oficina baseia-se em uma metodologia de aprendizagem que utiliza o questionamento como principal estratégia de ensino, chamada Aprendizagem por Questionamento, do inglês Inquiry Based Learning. Segundo Castelhana [4] as atividades propostas em tal estratégia devem compreender a realização de observações, momentos para perguntar, consultas em diversas fontes teóricas, coletar, analisar e interpretar dados, levantar hipóteses (argumentos), debater com os pares, buscar explicações e finalmente comunicar os resultados, ou seja, o estudante irá pesquisar conhecimentos e não apenas receber informações prontas como acontece nos ambientes escolares atuais.

Para Castelhana [4], desenvolver em sala de aula uma aprendizagem que se utiliza do questionamento, da indagação e do inquérito, desde os anos iniciais da escolarização, “é vital para que as crianças entendam o mundo ao seu redor; aprendam a obter e organizar informação; desenvolvam maneiras de descobrir e de testar as suas ideias e a usar evidências; além de desenvolver atitudes positivas em relação à ciência” [4], contribuindo para o desenvolvimento de diversas habilidades atitudinais e cognitivas, das diferentes áreas do conhecimento.

A referida estratégia permite aos estudantes vivenciarem melhor os processos de criação do conhecimento, instigando a elaboração sobre determinado conhecimento científico, a fim de levá-los a desenvolver suas próprias conclusões sobre o tema. É considerada uma estratégia de aprendizagem, porque a construção do conhecimento se dá por meio de atividades experimentais e analíticas.

Segundo Castelhana [4] a Aprendizagem por Questionamento utiliza-se de uma abordagem pedagógica do professor para que os estudantes aprendam através de questões orientadas, construindo seus conhecimentos, buscando explicar, avaliar e comunicar os resultados obtidos para a resolução dos questionamentos propostos inicialmente pelo professor. Castelhana [4] afirma ainda que a estratégia

supracitada foi desenvolvida a partir das preocupações de Dewey, que percebia a grande ênfase dada aos fatos, sem desenvolvimentos cognitivos, e não à ciência propriamente dita.

Para Castelhana [4], “o estudante deverá estar ativamente envolvido no processo de aprendizagem e o professor deverá ter um papel de facilitador e de guia”. A abordagem em questão permite a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento de competências, considerando o conteúdo escolar apenas um meio para o desenvolvimento das capacidades intelectuais dos estudantes. Castelhana [4] enfatiza também “a capacidade de questionar, colocar hipóteses, planejar investigações e tirar conclusões com base em evidências proporciona a todos os estudantes a competência para a resolução de problemas, de comunicação e de pensamento crítico de que precisarão para reivindicar seu lugar no século XXI”.

Na estratégia Aprendizagem por Questionamento o professor planeja sua prática pedagógica, buscando promover o desenvolvimento de habilidades intelectuais e acadêmicas do estudante através de questionamentos, podendo ser realizadas individualmente ou em grupos, nos diferentes níveis de escolarização, ficando o professor como mediador do processo, tornando o estudante um sujeito ativo e envolvido nas investigações propostas, com mais motivação para aprender.

Castelhana [4] considera ainda que a estratégia Aprendizagem por Questionamento contribui ainda para aproximar o ambiente da sala de aula do contexto social do estudante, transferindo experiências para o cotidiano dos mesmos. A estratégia pedagógica citada não precisa (e nem deve) ser a única metodologia de ensino a ser utilizada para o desenvolvimento das aulas. Cabe ao professor o planejamento e a realização de outras atividades, como por exemplo, atividades com o apoio dos recursos tecnológicos discutidos a seguir.

## III. RECURSOS TECNOLÓGICOS COMO FERRAMENTAS DE ENSINO

É evidente que o uso de tecnologias faz parte do cotidiano de grande parte da população mundial. Segundo Ferreira [5] no Brasil, por volta de 1981, foram iniciadas as discussões sobre a inserção do uso da tecnologia no meio escolar, as quais geraram programas públicos, que permitiram a implantação dos recursos tecnológicos nas instituições escolares. Para Ferreira [5] o principal objetivo da escola é promover o exercício da cidadania. Logo, se faz necessário que as instituições estejam de acordo com o contexto tecnológico disponível fora dos muros escolares, e, para isso, precisam atualizar-se e aproveitar os recursos disponíveis, como forma de melhorar a aprendizagem dos estudantes, ensinando-os a utilizar a tecnologia, além de desenvolver o senso crítico e ético do sujeito perante este recurso.

O uso das tecnologias em sala de aula contribui para a construção de uma aprendizagem significativa para o estudante, tornando a aula mais dinâmica, ativa e interessante, despertando a curiosidade em explorar as atividades, e tornando-as melhor compreendidas e aceitas. Os conteúdos escolares podem ser trabalhados de forma não exclusivamente expositiva o que proporciona uma

aprendizagem cognitiva, mas também o desenvolvimento de outras habilidades, como a resolução de problemas, entre outras.

No ensino de Matemática, o uso das tecnologias colabora para os processos de ensino e de aprendizagem, tornando-se uma atividade experimental que encoraja os estudantes a desenvolver a capacidade crítica, de investigação, discussão e exploração de conceitos, sendo o professor o coordenador das ações. As tecnologias proporcionam ao estudante fazer diversas atividades simultaneamente, como relacionar conceitos, valorizando a interatividade, a conectividade e a interdependência, tanto dos conteúdos, como entre as demais áreas do conhecimento.

Mas precisamos estar atentos, pois inserir os recursos tecnológicos no ambiente escolar não garante a qualidade de ensino almejada. As práticas pedagógicas e as atividades propostas com tais recursos devem ser planejadas e distanciadas do ensino tradicional, o qual tem como concepção de aprendizagem a recepção e a memorização de informações, o que não garante o alcance da aprendizagem.

A incorporação das inovações tecnológicas na escola só terá sentido quando, ao utilizá-las, contribuir-se para o

#### IV. PROPOSTA PEDAGÓGICA DA OFICINA

Com grande frequência nos deparamos com os seguintes questionamentos: Como ensinar Matemática de uma forma significativa para os estudantes? De que forma o conteúdo escolar pode ser relacionado à vida cotidiana dos estudantes? Como desenvolver o sujeito plenamente, contemplando as diferentes habilidades? Não existem respostas simples e prontas para tais inquietamentos, que não podem ser respondidos facilmente. Godoy e Santos [2], concordam que não há receitas prontas que expliquem o que fazer, como fazer e quando fazer, quando as questões estão relacionadas ao ensino da Matemática. O que há, de fato, é a necessidade de uma constante reflexão e formação do professor, sendo este o primeiro passo para a qualificação da educação brasileira atual.

Como parte do currículo da disciplina de Matemática do Ensino Médio brasileiro, um tópico é o estudo das Progressões Geométricas (PG), o qual está previsto para o 1º ou 2º ano escolar de acordo com cada instituição de ensino. Este objeto do conhecimento matemático frequentemente é desenvolvido através de uma aprendizagem memorística (mecânica), com aplicação de fórmulas, de maneira não contextualizada, sem relação com os demais conhecimentos matemáticos ou com as diferentes áreas do conhecimento.

Refletindo sobre esse problema real e comum, originou-se a oficina aqui descrita, cujo objetivo principal é abordar estratégias didáticas de ensino que possam contribuir para a prática pedagógica do professor de Matemática, podendo o mesmo aplicar em sua realidade de trabalho, com seus estudantes e assim proporcionar aos mesmos, aprendizagens significativas.

Como mencionado, a oficina utiliza-se da estratégia de ensino Aprendizagem por Questionamento e também do uso do software GeoGebra como recurso tecnológico para o desenvolvimento das atividades propostas.

progresso (ou mudança) da qualidade de ensino. Para Ferreira [5] o uso dos recursos tecnológicos nas escolas deve ter como intuito o enriquecimento e a própria transformação do ambiente educacional, devendo favorecer a produção do conhecimento a partir de uma atuação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes quanto dos professores.

Com a inserção dos recursos tecnológicos, o professor tem o papel de auxiliar o estudante no processo, selecionando atividades que permitam o pensar autonomamente. Assim, a partir de suas reflexões o estudante construirá o conhecimento sobre determinado objeto de estudo. Para Monteiro [6] ao propor uma atividade em sala de aula, o professor deve buscar formas do estudante interagir e participar do momento, percebendo e estabelecendo raciocínios sobre o conteúdo estudado.

A ação pedagógica é um ato intencional que deve ser planejado pelo professor. Logo, a escolha dos materiais e estratégias a serem utilizadas em sala de aula, deve ser baseada em uma análise da realidade e do contexto educacional, considerando fatores externos, como a estrutura física, por exemplo, e internos (cognitivos) da turma.

As interações entre os estudantes e professor, denominados como participantes e o coordenador, são constantes e as atividades são desenvolvidas de forma coletiva e individual.

Ao longo das atividades propostas são realizados pelo coordenador diversos questionamentos para que os participantes estabeleçam relações com os conceitos matemáticos (fractais e PG). São utilizados também roteiros de perguntas, que contém as orientações para a realização das tarefas, como um passo a passo, mas que, ao mesmo tempo, torna-se uma espécie de conversa entre o coordenador e os participantes. A utilização dos recursos tecnológicos auxilia na dinâmica da oficina, tornando-a atrativa e potencializando a ocorrência de aprendizagens significativas dos conceitos envolvidos.

A oficina inicia-se com uma breve explanação sobre o que é a estratégia de Aprendizagem por Questionamento, a fim de que os participantes se sintam localizados na forma como a mesma será conduzida.

A seguir, é exibido um vídeo sobre fractais, o qual está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=c2iTZqvaNuE>.

Para a explanação do assunto, os participantes são questionados a explicar quais são as características principais dos fractais. Espera-se que concluam que os fractais, em resumo, são figuras geométricas produzidas por equações matemáticas e que suas características principais são a autossimilaridade e os padrões em suas construções, presentes em menor escala. São discutidos, ainda, exemplos de fractais encontrados em nosso dia a dia, os quais são apresentados no vídeo, como por exemplo: as árvores, os rios, etc.

Em seguida, os participantes são divididos em grupos (duplas ou trios). Cada grupo recebe um roteiro (estudo orientado por questionamentos), o qual apresenta a proposta de construção de um fractal com dobradura. O roteiro

permite que os participantes relacionem a dobradura com o conceito de PG, utilizando para isso questionamentos e uma tabela que precisa ser preenchida de modo a formar uma sequência numérica.

Ao final desta atividade, no grande grupo, participantes e coordenador socializam suas conclusões com a realização da atividade, formalizando o conceito de PG (razão e soma dos termos) encontrado na construção do fractal.

Novamente em grupos (que podem ser diferentes dos grupos anteriores), os participantes recebem outro roteiro, com os passos para a construção do fractal, utilizando materiais de uso comum: lápis, papel, régua, etc. Os grupos constroem o fractal chamado Curva de Koch e novamente através de análises que partem de questionamentos, podem perceber o conceito citado em outro fractal.

Na sequência os participantes constroem o fractal Floco de Neve, utilizando para isso o software GeoGebra (programa computacional gratuito que permite a exploração de muitos conteúdos matemáticos), o qual permite criar um fractal mais elaborado, explorando ainda mais a característica da autossimilaridade, pois com o software podemos ampliar o fractal, percebendo os padrões em cada menor escala.

Como quinta atividade os participantes têm um tempo para pesquisar outros fractais conhecidos, como forma de perceber suas construções. Alguns fractais que podem ser indicados para a pesquisa: Tapete de Sierpinski, Conjunto de Cantor, Curva Dragão, Conjunto de Mandelbrot, Curva de Peano, entre outros.

Para encerrar a oficina e como forma de perceber a aplicação e relação dos conceitos estudados, são propostas alguns exercícios de múltipla escolha, os quais são encontrados em avaliações externas (Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM) e questões de vestibular para resolução.

A avaliação do aproveitamento dos participantes é acompanhada pelo coordenador através de observações contínuas, buscando perceber o envolvimento de todos na realização das tarefas. As criações dos fractais construídas no papel e no software GeoGebra, assim como as respostas aos questionamentos realizados e escritos nos roteiros, são consideradas pelo coordenador como instrumento avaliativo.

## V. RESULTADOS

Espera-se que, com as atividades propostas na oficina, os participantes percebam que há uma possibilidade de abordar o conhecimento matemático de PG de forma contextualizada e através de uma aplicação.

Para obter os resultados da oficina e analisar sua validade e o potencial das atividades desenvolvidas, é solicitado que os participantes respondam um questionário como tarefa final do encontro.

O instrumento de avaliação e futuro embasamento para aprimoramento da oficina, em sua primeira oferta, continha os seguintes questionamentos: 1) A oficina realizada contribuiu para a sua prática em sala de aula? Comente. 2) Você pretende utilizar as estratégias pedagógicas apresentadas na oficina com seus estudantes? Comente. 3) Sobre a oficina, complete as frases: que bom, que pena e que

tal. 4) Você conhecia a estratégia de aprendizagem (Aprendizagem por Questionamento) utilizada na oficina? e 5) Quais estratégias de aprendizagem você utiliza em sala de aula?

Todos os participantes afirmaram que a oficina contribuiu para a prática em sala de aula, pois é uma atividade diferenciada, dinâmica e prática, sendo o estudante um sujeito ativo no processo, pois aborda novas experiências e recursos para o ensino de tal conteúdo. Os participantes concordaram entre si e afirmaram que gostariam de aplicar tais atividades em sala de aula, mas ressaltam que a estrutura física dos laboratórios de informática das escolas onde atuam muitas vezes não permitem desenvolver um trabalho com o software GeoGebra, restando o uso de materiais convencionais (papel, lápis, tesoura, régua, etc) como única possibilidade.

Como pontos positivos da oficina ressaltam que as atividades são diferenciadas, tendo proporcionado aos professores participantes, o aprendizado de novas estratégias de ensino, sendo os fractais uma boa escolha para abordagem do conceito de PG. Como sugestão e necessidade de melhoria da oficina citaram o fator tempo, considerado insuficiente para as atividades propostas e que a oficina poderia ser apresentada nas escolas para que outros colegas tenham acesso a este conhecimento e aos materiais.

Dentre os seis participantes da oficina, apenas um não conhecia a estratégia de aprendizagem utilizada. Os mesmos citaram que além das estratégias de aprendizagem utilizadas na oficina utilizam a exposição, justificada pelo pouco tempo para abordar tantos conteúdos previstos pelos currículos escolares.

## VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversos são os desafios educacionais atuais, entre os quais estão a falta de estrutura física e de equipamentos nas escolas; a indisciplina e as atitudes de negação ao ensino por parte dos estudantes, que não encontram sentido real em estudar; o professor que sente-se desmotivado, trabalhando com grande carga horária; ou há ainda aqueles profissionais resistentes ao novo e que não conseguem desligar-se do ensino tradicional, sem perceber novas práticas de ensinar; o currículo escolar fechado, que não permite inovações, que lista os conteúdos a serem superados durante o ano letivo, não permitindo o desenvolvimento de projetos alternativos; entre outros fatores. O professor, sujeito envolvido, pode ser o agente da mudança, porém, sabemos que não é o único. Ainda assim, pode ser o passo inicial para desencadear as mudanças almejadas.

O trabalho desenvolvido pelo professor em sala de aula é resultado dos fatores citados acima e de outros não elencados, os quais interferem diretamente nas práticas pedagógicas desenvolvidas. A formação acadêmica e continuada do professor pode auxiliar na qualificação de sua trajetória profissional, gerando melhorias na educação, como um todo, o que justifica a necessidade do professor atualizar-se constantemente.

Para a efetiva mudança, os professores precisam concordar que a mudança é difícil, mas necessária, sentindo-se à vontade para transformar suas ações, visando qualificar o ensino. A formação contínua do professor, em si só não é a

solução para os problemas, mas permite reflexões e abre perspectivas para a construção de novas práticas, como utilização da Aprendizagem por Questionamento e dos recursos tecnológicos, por exemplo, que despertam um interesse maior dos estudantes pelos conteúdos escolares.

O professor que se dispõe a mudar precisa ser criativo e mediar o processo, fazendo do estudante o principal agente e construtor de sua aprendizagem, desenvolvendo-se como sujeito integral, capaz de refletir e não apenas decorar conteúdos. Somente assim, o professor deixa de ser o centro do processo e poderá atuar como facilitador e mediador.

Com o advento da tecnologia, a aprendizagem passou a ocorrer em diferentes espaços e de diferentes modos. As informações estão mais disponíveis para os sujeitos, porém cabe à educação proporcionar a inserção social no sujeito no mundo tecnológico, e muito há de ser feito ainda nesse aspecto.

## VII. BIBLIOGRAFIA

- [1] DRUCK, Suely. A crise no Ensino de Matemática no Brasil. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v. 52, 2003. Acesso em 23 de outubro de 2015. Disponível em: [http://www.geocities.ws/ailton\\_barcelos/Crisematematica.pdf](http://www.geocities.ws/ailton_barcelos/Crisematematica.pdf)
- [2] GODOY, Elenilton Vieira & SANTOS, Vinício de Macedo. O cenário do ensino de Matemática e o debate sobre o currículo de Matemática. Práxis Educacional, Vitória da Conquista, v. 8, n. 13, p. 253 – 280, jul. – dez. 2012. Acesso em 23 de outubro de 2015. Disponível em: <http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/1590/1462>
- [3] SCHU, Angela Maria Pacini & PACINI, Anderson Adilson. Análise e representação de progressão aritmética e geométrica com o uso do Microsoft/Excel. Acesso em 05 de janeiro de 2016. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/948/239>
- [4] CASTELHANO, Paula Cristina de Almeida Maria. Potencialidades de um Curso de Formação sobre o Método de Aprendizagem Ativa no Ensino das Ciências. 266 f. Dissertação de Mestrado – Educação, Universidade de Lisboa, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/17860>
- [5] FERREIRA, Fernanda Pires. O uso das TIC nas aulas de Matemática na perspectiva do professor. 2013. Acesso em 24 de outubro de 2015. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/119042/000735662.pdf?sequence=1>
- [6] MONTEIRO, Bruna Garcia. O uso de material concreto para melhor visualização dos sólidos geométricos. 74 f. Monografia (Graduação) – Coordenação de Matemática, Faculdade de Pará de Minas, 2013. Disponível em: [http://www.fapam.edu.br/admin/monografiasnupe/arquivos/31032014215758Monografia\\_-\\_Bruna\\_Garcia\\_Monteiro.pdf](http://www.fapam.edu.br/admin/monografiasnupe/arquivos/31032014215758Monografia_-_Bruna_Garcia_Monteiro.pdf)
- [7] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros Curriculares Nacionais PCN – Ensino Médio, Brasília: 2002.