

A Matemática do pega-pega

Ângela Soldatelli[†]

Resumo

Provavelmente, todos já brincaram de pega-pega e cometeram o erro de interceptar o alvo, ao invés de moverem-se em linha reta em direção a ele. Então, se o alvo repentinamente mudar de direção, o perseguidor ficará mais distante do alvo do que ficaria se estivesse correndo diretamente para ele. Neste artigo, discute-se modelos de curvas de perseguição, um clássico problema matemático que remonta a Leonardo da Vinci. Uma curva de perseguição é o caminho tomado por um objeto P que está perseguindo um segundo objeto A no espaço bidimensional, de tal maneira que o vetor-velocidade de P , em cada momento, visa à posição atual do alvo A .

Palavras-chave

Curvas de perseguição, Equações diferenciais, Modelagem, Matemática aplicada.

The Mathematics of playing tag

Abstract

Everybody have probably played tag before and made the mistake of trying to cut off the target, instead of moving straight towards it. Then, if the target suddenly changes direction, the pursuer is left further from the target than he would have been if he was running straight at it. This article discusses models of pursuit curves, a classic mathematical problem dating back to Leonardo da Vinci. A pursuit curve is the path taken by an object P that is pursuing a second object A in two-dimensional space, so that the velocity vector of P , at any time, points to the current position of the target A .

Keywords

Pursuit curves, Differential equations, Modelling, Applied mathematics.

I. INTRODUÇÃO

Quando crianças, aprendemos as regras simples do jogo de pega-pega: participam pelo menos dois jogadores, um deles (P) é designado para perseguir todos os outros, que, claro, tentam fugir. Quando P consegue pegar um dos fugitivos, esse (A) passa a ser o perseguidor, e o jogo continua até a exaustão. O esconde-esconde, também do gênero, é igualmente atraente para as crianças. E certamente todos lembram os velhos desenhos animados Papa Léguas, Coiote e Tom e Jerry.

À medida que envelhecemos, deixamos de brincar de esconde-esconde, pega-pega, e desenhos animados, mas continua a haver, para a maioria das pessoas, um profundo interesse por perseguição e fuga; o fascínio, simplesmente, torna-se mais sofisticado e mais instigante, fica a batalha entre o caçador e a caça.

Hollywood ama perseguição e fuga – filmes neste segmento incluem os do Agente 007, Predador, Alien e, mais recentemente, Prenda-me se for capaz, além de Velozes e Furiosos. Em videogames de computador também são adotados os conceitos de perseguição e fuga, como acontece nos mais bem sucedidos jogos, como, por exemplo, Call of Duty, Counter Strike e Hitman.

O objetivo com o presente trabalho é estudar problemas clássicos de perseguição. Originalmente, podem ter sido propostos por Leonardo da Vinci, e o primeiro a aplicar o cálculo de Newton à solução de tais problemas foi o cientista

francês Pierre Bouguer em 1732, que imaginou um navio pirata ultrapassando um navio mercante em alto mar. No entanto, o termo "curva de perseguição" foi definido pela primeira vez pelo britânico George Boole, em 1859 (Fig. 1) [1].

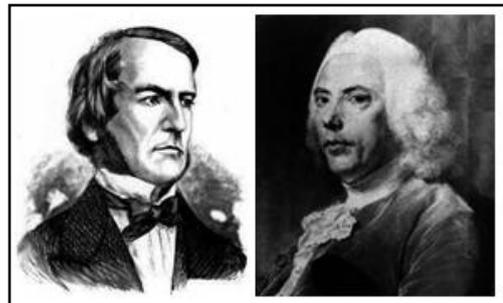


Fig. 1: George Boole e Pierre Bouguer [2].

Curvas de perseguição surgem em uma variedade de situações e podem servir como ponto de partida para a criação de desenhos artísticos maravilhosamente intrincados. Além disso, o conhecimento sobre este tema também é útil, por exemplo, no desenvolvimento de táticas de guerra usadas pelas forças armadas [3, 4].

Esta área fascinante da Matemática fornece bonitas aplicações do Cálculo, de Equações Diferenciais, Teoria dos Jogos e Geometria.

[†]Universidade de Caxias do Sul-RS-Brasil
E-mail: angelasoldatelli@gmail.com

II. MATERIAL E MÉTODOS

Consideraremos as seguintes hipóteses [5]:

- O vetor-velocidade de **P**, em cada instante, visa à posição atual de **A**;
- As velocidades de **P** e **A** são constantes, com proporção $k = v_P / v_A$ (Fig. 2);
- As funções de movimento são diferenciáveis;
- Para que **P** esteja sempre na direção de **A**, supomos que seu tempo de reação à mudança de trajetória de **A** é zero;
- Não há obstáculos físicos ou resistência do ar.

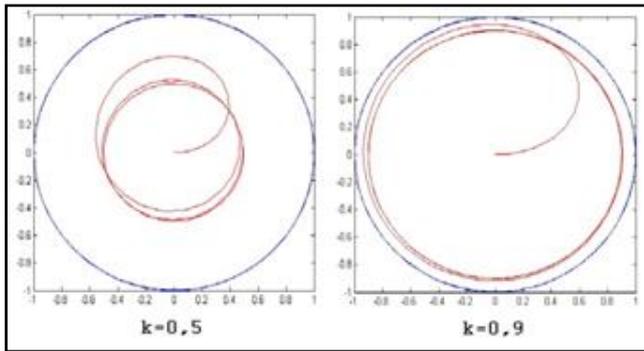


Fig. 2: Efeito do valor de k numa perseguição circular.

De modo geral, problemas de perseguição são resolvidos com técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, muitas vezes, por meio de equações diferenciais complicadas o suficiente para deixá-los fora do alcance dos alunos do ensino básico.

Felizmente, o professor tem à disposição diversos softwares de simulação e modelagem. O Modellus, por exemplo, é um software gratuito, desenvolvido por um grupo liderado pelo Prof. Vitor Teodoro, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Não é necessário possuir conhecimentos prévios de programação e pode ser utilizado tanto pelo professor, como um ambiente interativo para ilustrar um determinado assunto, quanto pelo aluno, como recurso para explorar um modelo matemático de um dado fenômeno, modificando parâmetros, condições iniciais e outros aspectos [6].

III. RESULTADOS

a) Três mísseis [7]:

Três mísseis guiados **P**, **Q** e **R**, cujas bases se encontram situadas, respectivamente, nos três vértices de um triângulo equilátero, à distância de 100 km uns dos outros, são lançados simultaneamente. O objetivo de **P** é atingir **Q**, **Q** dirige-se para **R** e **R** deve atingir **P**. Em intervalos regulares, os mísseis corrigem a rota, de acordo com a nova posição de seus alvos.

Na figura (Fig. 3) está representado como deve ser a trajetória de cada míssil. A curva verde representa a trajetória do míssil **P**, a azul do míssil **Q** e a vermelha do **R**.

Se os mísseis se deslocam a uma velocidade constante de 50 km/h, a partir do lançamento, quanto tempo leva até que ocorra a explosão?

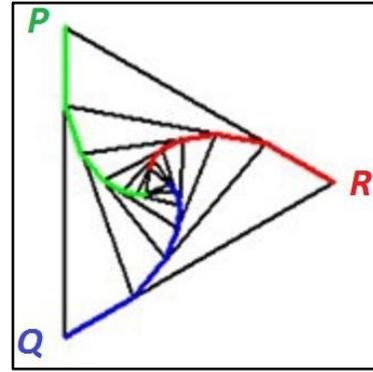


Fig. 3: Trajetória dos mísseis.

Solução: No começo da perseguição, os mísseis estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero e, por simetria, esta configuração se manterá durante o decorrer da perseguição.

Suponha, então, que num tempo t qualquer, os mísseis estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero cujos lados medem $a(t)$.

Se v é a velocidade de deslocamento dos mísseis, no tempo $t + \Delta t$, o míssil localizado no ponto **A** terá percorrido uma distância igual a $v\Delta t$ na direção do ponto **B**, onde se localizava o segundo míssil. Este míssil, por sua vez, terá percorrido a mesma distância em direção ao ponto **C**, onde se localizava o terceiro, e este último terá, também, percorrido essa mesma distância, porém, em direção ao ponto **A**, onde estava o primeiro míssil.

O diagrama (Fig. 4) mostra a nova configuração estabelecida pela posição dos três mísseis após um intervalo de tempo igual a Δt horas.

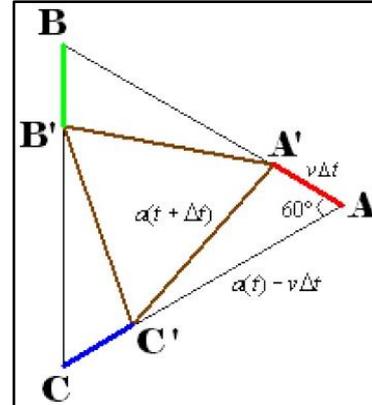


Fig. 4: Posição dos mísseis no tempo $t + \Delta t$.

Desse modo, pela lei dos cossenos:

$$a(t + \Delta t)^2 = [a(t) - v\Delta t]^2 + (v\Delta t)^2 - 2[a(t) - v\Delta t]v\Delta t \cos(60^\circ) \quad (1)$$

ou seja,

$$a(t + \Delta t)^2 = [a(t)]^2 - 3a(t)v\Delta t + 3v^2(\Delta t)^2 \quad (2)$$

Subtraindo $[a(t)]^2$ e dividindo ambos os lados da igualdade (2) por Δt :

$$\frac{a(t + \Delta t)^2 - [a(t)]^2}{\Delta t} = \frac{-3a(t)v\Delta t + 3v^2(\Delta t)^2}{\Delta t} \quad (3)$$

e fatorando o lado esquerdo:

$$\frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t} [a(t + \Delta t) + a(t)] = -3a(t)v + 3v^2\Delta t \quad (4)$$

Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ na equação (4), o que corresponde a uma mudança contínua na rota dos mísseis, o primeiro fator à esquerda da igualdade tende a $a'(t)$ (definição de derivada), o segundo a $2a(t)$ e a última parcela à direita tende a zero. Assim, no limite:

$$a'(t)2a(t) = -3a(t)v \Leftrightarrow a'(t) = \frac{-3v}{2} \quad (5)$$

Integrando a igualdade (5), obtém-se:

$$a(t) = \frac{-3}{2} \int v dt = \frac{-3vt}{2} + k \quad (6)$$

Pelos dados do problema, quando $t=0$, o lado a é 100 km. Consequentemente, fazendo $t=0$, tem-se k igual a 100. Além disso, também é informado que $v = 50$ km/h e, quando os mísseis se encontrarem, $a(t)=0$. Ao utilizar esses dados na equação acima, pode-se calcular o tempo t , para o qual $a(t)=0$. Fazendo estas substituições:

$$\frac{-3}{2} 50t + 100 = 0 \quad (7)$$

ou seja, $t = 1h20min$.

Observação 1: Os mísseis poderiam estar localizados nos vértices de qualquer polígono regular e a solução seria encontrada por um raciocínio semelhante. Os mísseis sempre se encontrarão no centro de massa dos polígonos que, no caso do triângulo, é o baricentro (Fig. 5).

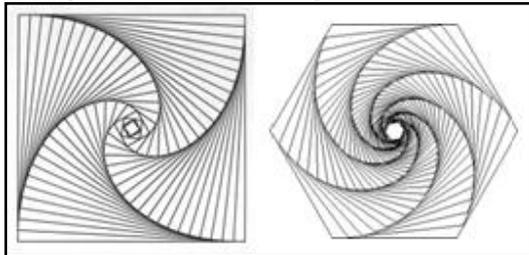


Fig. 5: Trajetória dos mísseis caso partissem dos vértices de um quadrado ou de um hexágono regular.

Observação 2: Em 1875, Henri Brocard constatou que, caso o triângulo não fosse equilátero, para que os mísseis se encontrassem, eles precisariam desenvolver velocidades diferentes. Além disso, haveria dois caminhos, que levariam a dois pontos de encontro: os “pontos Brocard” (Fig. 6).

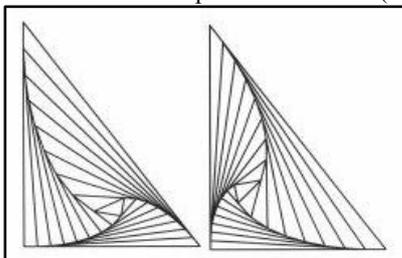


Fig. 6: Pontos Brocard.

b) A arena:

Um leão e um gladiador encontram-se em uma arena circular, de raio igual a 40 m. O gladiador move-se ao longo do bordo da arena, seguindo a circunferência, enquanto que o leão parte do centro e segue sempre em direção ao homem, ambos com a mesma velocidade (Fig. 7).

Por quantos metros deverá andar o leão até alcançar o gladiador?

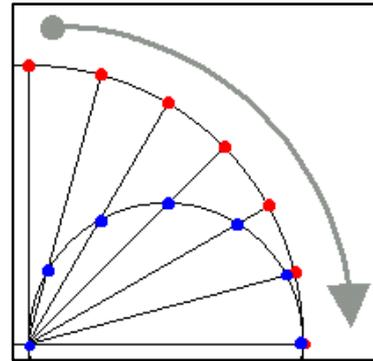


Fig. 7: Trajetória do gladiador (vermelho) e do leão (azul).

O leão deve seguir uma semicircunferência cujo diâmetro é igual ao raio da arena e é perpendicular ao raio inicial. De fato, os arcos delimitados por pontos vermelhos e azuis têm o mesmo comprimento. Sendo V a velocidade dos dois oponentes, R o raio da arena e t o tempo, a equação polar da trajetória do leão é

$$r = R \cdot \text{sen}(Vt/R) \quad (8)$$

Portanto, ele deve andar 20π metros.

c) O Problema de Apolônio:

Apolônio de Perga (262-190 a.C.) foi um dos maiores geométricos da antiguidade, ao lado de Euclides e Arquimedes. O conhecido “Problema de Apolônio” é como segue [8]:

Dado um navio com uma direção conhecida, que curso deve ser tomado por outro navio, que o está perseguindo (supondo ambas as velocidades conhecidas), a fim de interceptar o primeiro no menor tempo possível?

O problema pode ser resolvido encontrando todos os pontos que são simultaneamente alcançados pelos dois navios, que é um “círculo de Apolônio”. Se o círculo corta o trajeto do navio perseguido, a interseção é o ponto em direção ao qual o navio perseguidor deve seguir. Se o círculo não intercepta a trajetória, então ele não pode ser alcançado.

Uma das definições diz que um círculo de Apolônio é um dos oito círculos que são simultaneamente tangentes a três círculos dados – isto é, um círculo que é solução para o Problema de Apolônio com três círculos (Fig. 8).

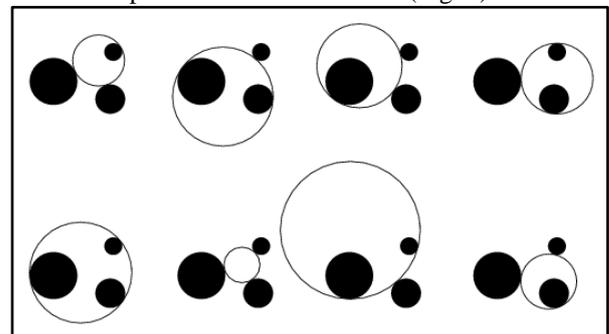


Fig. 8: Os oito círculos de Apolônio.

d) O gato e o rato:

Jerry encontra-se, pacificamente, na origem $O=(0,0)$ comendo seu queijo, quando Tom parte em sua direção. Jerry pressente o seu inimigo e toma a decisão de fugir ao longo do eixo y no sentido positivo, com velocidade constante vJ . A estratégia de Tom é correr sempre na direção de Jerry, com velocidade também constante vT [9].

Quais as condições para vJ e vT a fim de que Tom capture Jerry?

Descobre-se, através de equações diferenciais [10, 11], que Tom alcança Jerry se, e somente, se $vT > vJ$. As trajetórias de ambos estão ilustradas a seguir (Fig. 9).

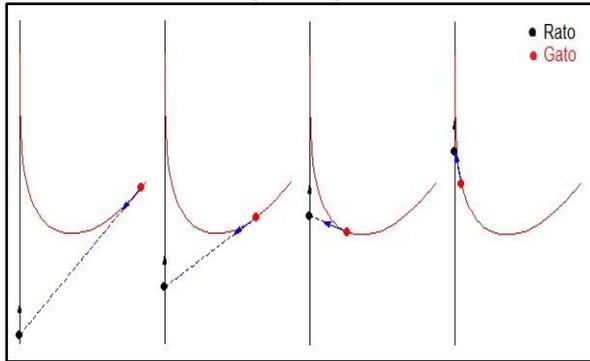


Fig. 9: Momentos da perseguição do rato pelo gato.

e) O Problema da Traineira:

Um barco veloz **A** (em vermelho) está seguindo uma traineira **B** (azul) quando a neblina (cinza) repentinamente começa a baixar (Fig. 10).

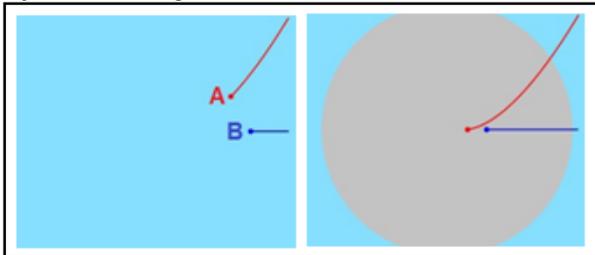


Fig. 10: Barco perseguidor (vermelho) e barco perseguido (azul).

Neste ponto, **B**, que está sendo perseguido, muda seu curso, mas não sua velocidade, e segue em linha reta numa nova direção, desconhecida por **A**. Como **A** deve proceder a fim de poder alcançar **B**?

A resposta mais impressionante é que **A** deve continuar em direção ao ponto em que **B** deveria estar, se tivesse mantido seu curso quando a neblina baixou. Se **B** não estiver lá, **A** deve seguir em uma espiral, centrada na origem, de tal maneira que, enquanto estiver circulando, a distância de **A** até a origem aumente na mesma razão que a de **B** à origem. Se a velocidade de **A** se mantiver constante, a espiral será logarítmica (Fig. 11).

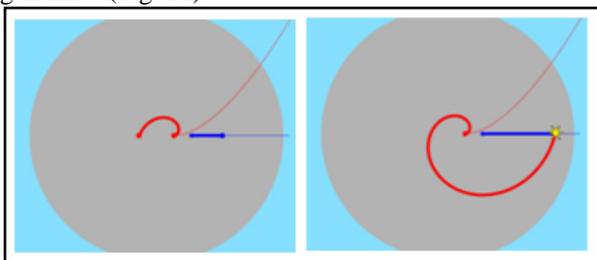


Fig. 11: Mudança de rota de **B** e trajetória ideal de **A**.

Observação: A fim de tornar o problema razoavelmente prático, **A** deve ser capaz de manter uma velocidade quatro ou cinco vezes maior que **B**.

Ampliando os horizontes, podemos traçar curvas de perseguição em uma superfície 3D. No seguinte exemplo (Fig. 12), um leão (vermelho) está perseguindo uma gazela

(azul) a 30% da sua velocidade, sobre uma superfície de equação

$$z = 20\text{sen}(x)\text{cos}(y).(9)$$

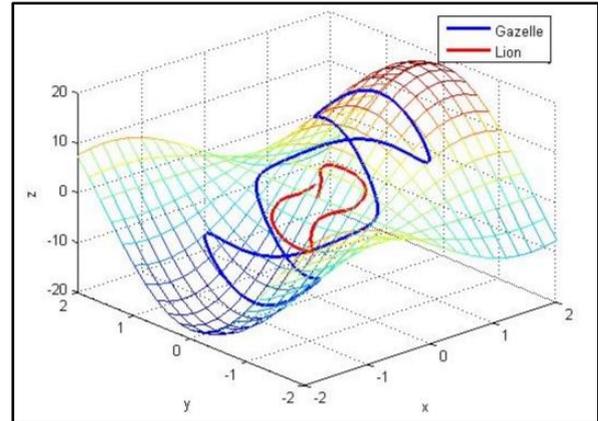


Fig. 12: Leão e gazela, $k=0,3$.

São aplicações possíveis das curvas de perseguição [12]:

- *Estratégias de jogo:* perseguição em um espaço confinado (como um ringue de boxe); perseguição quando o movimento é condicionado (xadrez); impedir presa de alcançar refúgio (pega-pega).
- *Perseguição militar:* mirar quando disparar contra o alvo; otimizar trajetórias de perseguição; perseguição tridimensional na água ou ar.
- *Engenharia de software:* desenvolvimento de jogos eletrônicos e aplicativos para tablets e smartphones.
- *Movimentos de animais:* cão perseguindo alguém; aranha; correndo ao longo da sua teia; fazendeiro tentando cercar porcos que escaparam.
- *Arte e decoração:* escultura Icosaspirale em San Francisco, tapetes, almofadas, bolsas, etc (Fig. 13).



Fig. 13: Curvas de perseguição na arte e decoração.

IV. CONCLUSÃO

Problemas de perseguição, normalmente, não são abordados nas licenciaturas; consequentemente, tornam-se incomuns no ensino básico. Eles fazem parte de uma gama de situações que o professor pode lançar mão como um apêndice no estudo de cinemática ou de geometria [13].

Entretanto, poucos são os problemas de perseguição que requerem apenas conhecimentos elementares por parte dos alunos. Na maioria das vezes faz-se necessário o uso de métodos do Cálculo Diferencial e Integral. Afortunadamente, problemas de perseguição, mesmo os mais complexos, podem ser simulados com softwares educacionais, como o Modellus.

V. BIBLIOGRAFIA

[1] Simoson A. *Pursuit Curves for the Man in the Moone*. College Mathematics Journal. 2007; 38: 330-338.
 [2] Lloyd M. *Pursuit curves*. MAA (Mathematical Association of

- America) Sections, Academic Forum 24, 2006.
- [3] Handelman GH. *Aerodynamic pursuit curves for overhead attacks*. Journal of the Franklin Institute. 1949; 247(3): 205-221.
- [4] Shneydor NA. *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 1998.
- [5] Barton LC; Eliezer CJ. *On Pursuit Curves*. Journal of the Australian Mathematical Society Series B Applied Mathematics. 2000; 41: 358-371.
- [6] Oliveira Jr RL. *Problemas e Curvas de Perseguição no Ensino Médio: Usando o Modellus como Ferramenta Alternativa*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, UFRJ, 2011.
- [7] Kubrusly R. *Projeto: Tecnologias no Ensino, IM-UFRJ*. Disponível em: <www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projeto.html>.
- [8] Lopes R; Tort AC. *The airplane carrier, the torpedo, and the Apollonius circle*. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2014; 36(3): 1-5.
- [9] Guha A; Biswas S. *On Leonardo da Vinci's Cat and Mouse Problem*. Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications. 1994; 30: 12-15.
- [10] Simmons G; Krantz S. *Differential Equations*. New York: McGraw Hill, 2007.
- [11] Figueiredo D; Neves A. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- [12] Mungan C. *A classic chase problem solved from a physics perspective*. European Journal of Physics. 2005; 26: 985-990.
- [13] Oliveira Jr RL. *Introducing pursuit problems and curves to High School and university students*. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2015; 37(4): 1-5.