O Paradoxo da Porta dos Desesperados

Ângela Soldatelli†

Resumo

A “Porta dos Desesperados” é um jogo com três portas: atrás de uma delas há um prêmio, e atrás das outras, um monstro. O participante escolhe uma porta e ganha o que estiver atrás dela. Então o apresentador, sabendo em qual porta está o prêmio, abre uma das portas não escolhidas revelando um monstro. E faz a derradeira pergunta: “Quer trocar?”. Afinal, é ou não vantajoso trocar de porta? Este pequeno problema é mais difícil do que parece, e a resposta é contra-intuitiva: é sim vantajoso trocar – na verdade, a probabilidade de ganhar o prêmio dobra ao se trocar de porta.

Palavras-chave

Problema de Monty Hall, Paradoxo, Teorema de Bayes, Probabilidade Condicional, Estatística Bayesiana.

The Monty Hall Problem

Abstract

"Let's Make a Deal" is a game with three doors: behind one of them there is a prize, and behind the others, a monster. The participant chooses a door and get what is behind it. Then the presenter, who knows which port the prize is, opens one of not chosen doors to reveal a monster. And does the ultimate question: "Do you want to change?". After all, change the door is advantageous, or not? This little problem is more difficult than it seems, and the answer is counterintuitive: yes, it is advantageous to change – in fact, the probability of winning the prize, doubles when changing the door.

Keywords

Monty Hall Problem, Paradox; Bayes' Theorem, Conditional Probability, Bayesian Statistics.

I. Introdução

Quando se tem uma situação-problema com duas alternativas possíveis, é natural que o primeiro pensamento seja no sentido da equiprobabilidade, em outras palavras, que cada uma tenha 50% de chance de acontecer, como se fosse um jogo de cara e coroa. Porém, nem sempre é assim; as soluções podem ter pesos diferentes.

O problema de Monty Hall é uma destas situações. É um aparente paradoxo, que surgiu a partir do “Let's Make a Deal”, programa de auditório exibido na televisão americana entre as décadas de 60 e 70, apresentado por Monte Halperin (Monty Hall) (Fig. 1).

Fig. 1: Monty Hall e o cenário de “Let's Make a Deal”.

O jogo consistia no seguinte: o apresentador disponibilizava 3 portas aos participantes, sabendo que atrás de uma delas estava um bom prêmio e que as outras tinham prêmios de pouco valor – na versão brasileira, havia brinquedos e monstros (Fig. 2).

Fig. 2: Versão brasileira de a “Porta dos Desesperados”.

- Na 1ª etapa, o participante escolhe uma porta;
- Em seguida, Monty abre uma das portas que o participante não escolheu (sabendo de antemão que o prêmio bom não se encontra ali);
- Agora, com duas portas para escolher – pois uma delas já se viu, na 2ª etapa, que não tinha o prêmio – e sabendo que o carro está atrás de uma delas, o participante tem a chance de decidir se permanece com

†Universidade de Caxias do Sul-RS-Brasil
E-mail: angelasoldatelli@gmail.com

Data de envio: 13/12/2016
Data de aceite: 13/12/2016

http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v4iss4p228

a porta que escolheu no início do jogo ou se troca para Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou trocar? Em qual das portas ainda fechadas o participante tem mais chance de ganhar? Por quê?

Este artigo se destinará a responder a estas questões a fim de esclarecer a solução deste problema, que, apesar de aparentemente simples, é completamente contra-intuitiva e ilustra o quão útil e importante é o conhecimento sobre probabilidades.

II. REFERENCIAL TEÓRICO

O inglês Thomas Bayes (1701-1761) foi um pastor protestante (Fig. 3). Sabe-se pouco a respeito de sua vida, apesar dele dar nome ao, talvez, mais famoso teorema da estatística. Sua obra foi publicada somente após a sua morte, em 1763, e se tratava de como formular convicções probabilísticas a respeito do mundo diante de novos dados.

Fig. 3: Thomas Bayes.

O conceito fundamental da estatística bayesiana é a probabilidade condicional: *Pr(H/E)* – a probabilidade de ocorrer a hipótese *H*, dado que acontece a evidência *E*. Para computá-la, precisa-se levar em consideração a probabilidade prévia de *H* (a probabilidade que atribuir-se-ia a *H* se não houvesse evidência alguma) e até que ponto *E* fornece evidências de *H*. Sejam:

- $Pr(H_i/E)$: probabilidade de que a hipótese H_i seja verdadeira, dada a evidência *E*;
- $Pr(E/H_i)$: probabilidade de que observa-se a evidência *E*, dado que a hipótese H_i é verdadeira;
- $Pr(H_i)$: probabilidade a *priori* de que a hipótese *i* seja verdadeira na ausência de qualquer evidência específica (estas probabilidades são chamadas de probabilidades prévias);
- *k*: número de hipóteses possíveis.

O Teorema de Bayes afirma que [2]:

$$Pr(H_i/E) = \frac{Pr(E/H_i) \cdot Pr(H_i)}{\sum_{n=1}^{k} Pr\,(E/H_n) \cdot Pr(H_n)}.$$

III. RESULTADOS

A resposta intuitiva da maioria das pessoas ao Problema de Monty Hall seria que, quando o apresentador revela uma porta não-premiada, ter-se-ia à frente um novo dilema com apenas duas portas e um prêmio, portanto, a chance de que o prêmio estivesse em qualquer uma das duas portas seria de 50% e não faria diferença alguma trocar (Fig. 4).

a outra porta que ainda está fechada [1].

Fig. 4: Ilustração do contexto do Problema de Monty Hall.

O erro desta resposta decorre da falsa ideia de que o apresentador escolhe a porta aleatoriamente. Em termos matemáticos, se trata de um problema de probabilidade condicional, pois a porta que o apresentador abre depende da porta que escolhemos inicialmente e ele sabe desde o começo onde está o prêmio – de modo que nunca abrirá a porta premiada.

Ao abrir uma porta não-premiada, ele não está criando um novo jogo; na realidade, se bem interpretado, ele está fornecendo informações sobre a localização do prêmio. Se o participante tiver escolhido inicialmente uma porta não-premiada (o que é mais provável), o apresentador não tem liberdade de escolha: só lhe resta abrir a porta não-premiada que sobrou, obrigando-o a continuar mantendo fechada a única porta premiada.

Através da análise do espaço amostral, pode-se observar como se comportam estas probabilidades. Sejam as portas 1, 2 e 3 e suponha-se, a princípio, que o participante tenha selecionado a porta 1. Ele tem a escolha de trocar ou não, e o prêmio pode estar em qualquer uma das 3 portas (Fig. 5).

Opções	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganha?
Escolhe 1 e não troca	Prêmio	Nada	Nada	Sim
Escolhe 1 e troca	Prêmio	Nada	Nada	Não
Escolhe 1 e não troca	Nada	Prêmio	Nada	Não
Escolhe 1 e troca	Nada	Prêmio	Nada	Sim
Escolhe 1 e não troca	Nada	Nada	Prêmio	Não
Escolhe 1 e troca	Nada	Nada	Prêmio	Sim

Fig. 5: Análise do espaço amostral caso se escolha a porta 1

Como as portas, em princípio, são idênticas, não há perda de generalidade em analisar o caso acima – em outras palavras, para os outros espaços amostrais o resultado será o mesmo.

Note-se que o evento analisado não é apenas “escolher uma porta”. São 2 eventos: “escolher uma porta” e “trocar de porta”. O que se percebe pela análise do espaço amostral é que, quando o participante decide trocar de porta, ele ganha 2 vezes e perde 1 (sucesso em 2/3 das vezes); já, ao permanecer com a mesma porta, ele terá êxito em apenas 1/3. Ou seja, sua probabilidade de ganho é de 2 para 1 caso ele decida trocar de porta. São, portanto, 66,7% de chance de ganhar e 33,3% de chance de perder. A mesma análise pode ser feita através de um diagrama de árvore (Fig 6).

Fig. 6: Diagrama de árvore.

As probabilidades podem ser calculadas também através do Teorema de Bayes [3]. Sejam as portas *A*, *B* e *C* e os eventos:

- *PA*: o prêmio está em *A*;
- *PB*: o prêmio está em *B*;
- *PC*: o prêmio está em *C*;
- *RA*: o apresentador revela o conteúdo (vazio) de *A*;
- *RB*: o apresentador revela o conteúdo (vazio) de *B*;
- *RC*: o apresentador revela o conteúdo (vazio) de *C*.

Considere que *A* é a porta escolhida inicialmente e *B* a porta vazia aberta pelo apresentador.

Através do Teorema de Bayes, pode-se proceder ao cálculo da probabilidade de o prêmio estar em A, dado que o apresentador abre a porta B (ou seja, se trata de calcular a probabilidade *Pr[PA|RB]*) (Fig. 7):

$$\Pr[PA \mid RB] = \frac{\Pr[RB \mid PA].\Pr[PA]}{\Pr[RB \mid PA].\Pr[PA] + \Pr[RB \mid PB].\Pr[PB] + \Pr[RB \mid PC].\Pr[PC]}$$

$$\Pr[PA \mid RB] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{3}\right) + 0.\left(\frac{1}{3}\right) + 1.\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \Pr[PA \mid RB] = 1/3$$

Como, $\Pr[PA \mid RB] + \Pr[PB \mid RB] + \Pr[PC \mid RB] = 1$ e $\Pr[PB \mid RB] = 0$, concluímos que:

$$\Pr[PC \mid RB] = 1 - \Pr[PA \mid RB]$$

$$\Pr[PC \mid RB] = 1 - 1/3 \Rightarrow \Pr[PC \mid RB] = 2/3$$

Fig. 7: Solução do Problema de Monty Hall pelo Teorema de Bayes.

Este problema de troca de porta pode não ser tão simples. E se o participante tivesse 100 portas para escolher, com apenas uma porta que esconde um carro e todos os outros ocultando bodes? Inicialmente, o participante tem uma chance entre em cem (1% ou 0,01) de acertar onde está o carro. A partir daqui, o apresentador sabe onde o carro está e revela 98 bodes, deixando apenas duas portas fechadas.

Se o participante não conhece o Problema de Monty Hall, ele pode pensar que as chances de acertar em qual porta está o carro é de 50%. Na verdade o participante deve alternar as portas sempre. Se o participante escolheu o carro inicialmente, ele o perderá caso mude de porta com apenas uma chance em cem. É muitíssimo mais provável (99%) que o participante tenha escolhido inicialmente um bode. Quando o apresentador revelar, então, 98 bodes, o participante deve sabiamente trocar a porta inicialmente escolhida (Fig. 8).

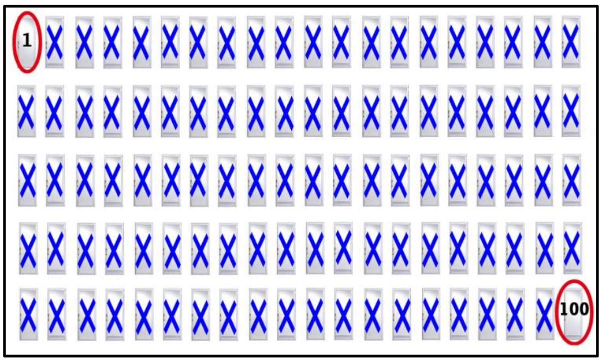

Fig. 8: Problema de Monty Hall para 100 portas.

Um estudo recente [5] submeteu humanos e pombos ao Problema de Monty Hall e verificou que, durante o experimento, os pássaros foram se adaptando ao problema. Ao final, os pombos adotaram uma estratégia que maximizasse a obtenção do prêmio. Já os humanos, não.

No primeiro dia de experimento, ambos, humano e pombo, adotavam uma estratégia razoavelmente similar. Ao final do trigésimo dia, depois de 200 tentativas, os participantes humanos eram 30% menos propensos a adotarem a estratégia correta, comparados aos pombos.

Ao que parece, os pombos aprendem rapidamente que mudar de porta dá mais prêmios ao longo do tempo. Já os humanos têm, comprovadamente, uma enorme dificuldade de compreender o problema de Monty Hall (talvez por isso haja tanto esforço no sentido de explicá-lo de tantas maneiras distintas – Fig. 9).

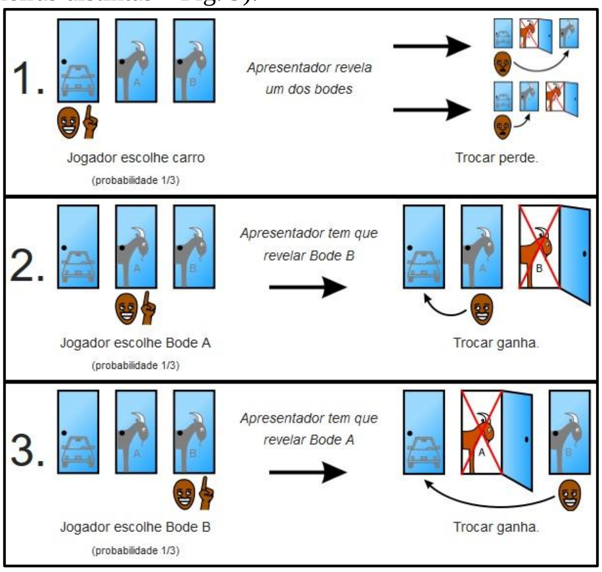

Fig. 9: Mais uma ilustração para o problema de Monty-Hall.

IV. Considerações Finais

Este paradoxo demonstra como o cérebro humano não consegue lidar intuitivamente com tipos específicos de problemas, e pode ser utilizado em classe para instigar os alunos e diferenciar as probabilidades condicionais das demais. O bom uso das probabilidades é uma ferramenta essencial na vidas de todos – ainda que de forma intuitiva, não necessariamente calculada da maneira mais exata. Não é à toa que o estudo desse conteúdo é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

V. Agradecimentos

A autora agradece aos organizadores do V SECIMSEG pelo espaço único na Serra Gaúcha para a discussão e

reflexão acerca do processo tão complexo de ensino-aprendizagem, ao passo que é grata também pela oportunidade de trocar experiências potencialmente enriquecedoras para todos os participantes.

VI. Bibliografia

[1] Florêncio PHB; Santos Neto AS; Dantas MJP. *Análise do problema de Monty Hall: um enfoque bayesiano.* IX SAEPRO – Simpósio Acadêmico de Engenharia de Produção, 2014.

[2] Figueiredo AC. *Probabilidade Condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. PUC/SP, 2000.

[3] Sá IP; Sá VGP. A *Porta dos Desesperados. Revista do* GEPEM/UFRRJ – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, v. 52, 2008.

[4] Vitor DP; Lemos HCF. *O Teorema de Monty Hall e o Cálculo da Aproximação de Como Fator de Estímulo ao Ensino da Probabilidade*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. UFSJ/MG, 2014.

[5] Herbranson WT; Schroeder J. *Are Birds Smarter Than Mathematicians? Pigeons (Columba livia) Perform Optimally on a Version of the Monty Hall Dilemma.* Journal of Comparative Psychology. v. 124, n. 1, p. 1-13, 2010.