

Explorando Conceitos de Geometria não Euclidiana

Luiz Ambrozi*, Jucele Glowacki* e Laurete Teresinha Zanol Sauer*

Resumo

Com este artigo pretende-se propor diferentes situações de ensino e aprendizagem, da forma como podem ser aplicadas em escolas, mediadas pela utilização de materiais concretos e do software Geogebra, enfatizando o uso de tecnologia em sala de aula, que, nessa proposta, tem o papel de auxiliar na conceitualização e identificação de elementos da geometria não euclidiana. Além disso, este minicurso foi planejado para se constituir num momento de atualizada e formação continuada para professores, com atividades a serem desenvolvidas com geometria dinâmica e fundamentadas na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Palavras-chave

Educação matemática; Geometria não euclidiana; Geometria Dinâmica; Campos Conceituais.

Exploring Concepts of Geometry not Euclidean

Abstract

With this article we intend to propose different situations of teaching and learning, how they can be applied in schools, mediated by the use of concrete materials and Geogebra software, emphasizing the use of technology in the classroom, that this proposal has the role of assisting in the conceptualization and identification of elements of non-Euclidean geometry. In addition, this short course is designed to be a time of current and continuing education for teachers, with activities to be developed with dynamic geometry and based on the theory of Conceptual Fields of Vergnaud.

Keywords

Mathematics education; Geometry non-Euclidean; Dynamic Geometry; Conceptual Fields.

I. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que por muitas vezes traz frustrações e curiosidades para os estudantes a âmbito de educação básica. Por muitas premissas, ela é vista como uma sucessão de números, equações e algoritmos que não faz sentido algum quando são apresentados e reproduzidos de forma mecânica. Muitos educadores desta área têm dificuldades para fazer conexões com outros componentes curriculares, deixando de estimular as relações matemáticas com a natureza como um todo. Segundo D'Ambrósio [1]:

A consciência é o impulsionador da ação do homem em direção a sua sobrevivência e a transcendência, ao seu saber fazendo e fazer sabendo. O conhecimento é gerador do saber, que vai por sua vez, ser decisivo para a ação, e por conseguinte é no comportamento e na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento. [1] p. 21.

Nas palavras de D'Ambrósio, podemos perceber que a

Matemática surge da ação do homem e que está ciência vem se refazendo e reconfigurando seus cenários, na produção de novos conhecimentos. Tudo isto converge para novas ideias, por meio da curiosidade de quem se sente fascinado pela mesma e busca, na sua essência, novas maneiras de reconfigurá-la e expandi-la. Dentre os diversos ramos da Matemática, a Geometria é um dos seus ramos que oferece muitas possibilidades para que aluno e professor desenvolvam competências deão enfrentar novas situações. Para Lorenzato [2], a Geometria é propícia para o desenvolvimento de capacidades como a criatividade, a percepção espacial, o raciocínio hipotético-dedutivo, que conduzem a uma “leitura interpretativa” do mundo.

Assim, por essas ações, a Geometria é favorável a vários estilos de aprendizagem, que podem existir numa sala de aula. Neste sentido, a importância da Geometria justifica-se também pelas competências que podem ser desenvolvidas nos alunos, frente suas relações com as outras áreas do saber e a possibilidade de se trabalhar com as diferenças individuais dos alunos.

A Geometria nas escolas, em geral, é trabalhada baseando-se em conceitos euclidianos, que muitas vezes não representam as muitas situações que do dia a dia, pois nem

*Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS.

E-mails: luizambrozi@hotmail.com, jucele.bento@gmail.com, lzsauer2@gmail.com

Data de envio: 12/12/2015

Data de aceite: 15/12/2015

<http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v3iss3p130>

tudo o que se vê está descrito num espaço plano. Considerando a história e o desenvolvimento da Matemática, segundo Kaleff [3], foram os processos de negação do quinto postulado de Euclides que deram origem à criação de novas teorias matemáticas e ao grande desenvolvimento da Matemática do século XX e do atual.

II. MATERIAL E MÉTODOS

Vergnaud [4] defende a ideia de que “não se pode estudar Matemática sem compreender o processo cognitivo da criança, do adolescente e também do professor. Logo, ao considerar que a aprendizagem da Geometria necessita de diferentes situações que forneçam a construção da teoria com possibilidade de propiciar a visualização e o significado de conceitos o papel do professor é o de mediar e fornecer desafios que instiguem o raciocínio, zelar para que as informações sejam compatíveis ao nível intelectual dos estudantes e fornecer recursos que auxiliem na aprendizagem.

Para Moreira [5], a teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopietetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências. Moreira considera ainda, que a teoria de Vergnaud apresenta um grande potencial para descrever, analisar e interpretar aquilo que se passa em sala de aula na aprendizagem de Matemática e ciências.

A importância da teoria dos campos conceituais, conforme Carvalho e Aguiar [6], se dá, pois, a mesma enfatiza que um dos aspectos favoráveis desta teoria é que a mesma, trata não apenas com conceitos já formalizados e consolidados pelo sujeito, mas também e sobretudo com conhecimentos em via de formalização. Dessa forma podemos identificar, em situações problema, os modos de compreensão dos estudantes em processo de formação.

Ensino de geometria no Brasil

O ensino de Geometria no Brasil passou por diversas modificações, no final do século 18, segundo Bayer e Lobo [7], “ havia no Brasil dois tipos de ensino, o ensino clássico-literário, ministrado nas escolas religiosas e o ensino nas escolas militares, onde o conhecimento era específico e as aulas de Geometria, Álgebra, Aritmética, Trigonometria e outras estruturavam os cursos para a formação de artilheiros, engenheiros, mão-de-obra especializada. Em 1998, foram criados pelo MEC, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 5ª à 8ª série para ajudar o professor a preparar os seus alunos para um mundo competitivo. Dessa forma os PCN's de Matemática de 5ª à 8ª séries do ensino fundamental [8] retomam o ensino de Geometria através de construções geométricas com régua e compasso, associando a geometria a outros conteúdos nas aulas de Matemática e garantindo a importância do ensino dos conceitos geométricos para a compreensão de outros conceitos matemáticos e para que o aluno compreenda o mundo em que vive.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive [8].

Embora em vários estudos e documentos destaca-se a importância de um ensino de geometria voltado para a realidade do aluno, que valorize a construção desse pensamento. Podemos ainda observar muitas dificuldades quanto ao ensino e quanto a aprendizagem de geometria em nossas escolas, onde percebe-se que as práticas de ensino são caracterizadas pelo tratamento estereotipado dados aos objetos geométricos, a apresentação de demonstrações com argumentos ordenados e prontos. Assim, deve-se buscar um ensino que além de propiciar aos alunos conexões entre o saber do aluno e o saber escolar, promova a visualização, a construção dos pensamentos geométricos a fim de promover a novas maneiras de ver os espaços que nos rodeiam.

Geometria dinâmica

Uma das possíveis alternativas para desmistificar o ensino de geometria é a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula, pois segundo Gravina [9], a tecnologia digital coloca à nossa disposição, diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos manipuláveis. Esse aspecto das mídias digitais torna-se muito importante diante das diferentes formas de aprendizagem, permitindo assim que o maior número de alunos consigam desenvolver as habilidades necessárias para a compreensão do objeto geométrico.

Moran [10] afirma ainda que:

As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes. Desse modo, é difícil negar a importância do uso das tecnologias na escola. [10], p.164.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [8] enfatizam a importância dos recursos tecnológicos para a educação, visando a melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Afirmam que a informática na educação “permite criar ambientes de que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender”.

Dentro das possibilidades tecnológicas surge, a geometria dinâmica, cujo termo, comumente é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, ou até mesmo os chamados régua e compasso eletrônicos, constituindo-se de ferramentas importantes para o ensino da geometria euclidiana, estes softwares também costumam ser usados em pesquisas e em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva.

A proposta do uso de softwares de geometria dinâmica, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida à medida que se forneça ao aluno material de apoio didático baseado em elementos concretos

representativos do objeto geométrico em estudo, como afirmado por Gravina e Santarosa [11]:

“O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis”. [11], p. 34.

Geogebra

Dentre os inúmeros softwares que exploram a geometria, o software Geogebra é um dos programas mais completos para o ensino de matemática, pois reúne geometria, álgebra, aritmética e cálculo, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino. É livre e possui uma plataforma de visualização atraente com uma área de trabalho de fácil manuseio. Ou seja, o software é uma ferramenta que auxilia no ensino da matemática, por meio de uma combinação entre entes geométricos e algébricos permitindo a visualização e a conexão entre a fórmula algébrica e sua respectiva representação geométrica, simultaneamente. O software foi desenvolvido por Markus Hohenwarter [12] e, em 2001, foi lançada sua primeira versão, é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

O Geogebra foi elaborado a fim de se obter uma ferramenta para o auxílio no ensino de procedimentos algébricos e geométricos, como um meio inovador e dinâmico. O programa recebe constantes atualizações e possui versão em português. Pode ser utilizado em sala de aula e favorece a interação entre os conteúdos fundamentais da matemática.

Geometria Não Euclidiana

Desde a criação da geometria axiomática de Euclides e da publicação do livro *Os Elementos* por volta de 300 anos a.C., o mesmo sempre foi bem aceita perante a classe matemática e filosófica da época. No entanto, o *Quinto Postulado da Geometria Euclidiana* sempre foi alvo de críticas, devido a ser uma afirmação de redação muito elaborada e de difícil interpretação, como aponta a primorosa tradução de Irineu Bicudo [13]: *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarão-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.*

Os esforços malsucedidos para provar esse postulado, a partir de outros quatro originalmente considerados por Euclides, perduraram durante mais de 2000 anos. Na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como

Karl Frederick Gauss em 1824, Nicolai Lobachevsky em 1829, Janos Bolyai em 1832, Georg Bernhard Riemann em 1854 e posteriormente Eugenio Beltrami, Jules-Henri Poincaré e Felix Klein concluíram que a pretendida demonstração não era possível. A negação do Quinto Postulado teve como consequência a descoberta da geometria hiperbólica e da geometria elíptica, e o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao euclidiano, conhecidos como geometrias não-euclidianas.

Descrição do minicurso

Tema: Geometria não euclidiana

Objetivo: O objetivo geral deste minicurso é propor atividades de exploração de conceitos básicos de geometria não euclidiana, tais como: geometria do táxi, geometria esférica e geometria dos fractais através das quais os educandos poderão participar de situações pedagógicas que permitem apresentar a negação de um axioma euclidiano.

Objetivos específicos

- Explorar a comparação entre distância entre dois pontos da geometria euclidiana e a geometria do Táxi;
- Construir uma circunferência Táxi e calcular o valor de PI para a Geometria do Táxi;
- Comparar as retas traçadas nas superfícies planas e esféricas, bem como verificar a inexistência de retas paralelas na esfera;
- Apresentar a geometria dos fractais como possibilidade de exploração de outros conteúdos matemáticos.

III. METODOLOGIA

Materiais necessários: um computador por aluno com o software Geogebra instalado, data show. O minicurso será uma junção de sequências didáticas que exploram os temas de geometria não euclidiana. No primeiro momento os ministrantes apresentarão o tema geometria não euclidiana de forma lúdica. A primeira situação explorará a geometria do Táxi, com o auxílio do software Geogebra, nesse momento os educandos poderão determinar as diferenças entre a distância entre dois pontos no espaço euclidiano e num espaço não euclidiano, além disso poderão através de uma construção, ainda utilizando o Geogebra, explorar uma circunferência Táxi e o valor do número PI nessa “circunferência”. Na segunda situação os educandos poderão, através da construção de um transferidor esférico, analisar as diferenças de retas da geometria esférica para a geometria plana, além disso poderão calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo na mesma superfície. Para explorar a geometria dos fractais será apresentado um vídeo que aborda as situações onde podemos encontrar os fractais na natureza e em situações do dia a dia, posterior a isso os alunos do minicurso serão divididos em grupos, onde cada grupo realizará a construção de um fractal sendo eles: Triângulo de Sierpinski, Árvore Pitagórica e a Esponja de Menger, todas as construções serão realizadas utilizando o software Geogebra, após a construção será feita a exploração dos conceitos de fractais. Para finalizar os ministrantes

apresentarão sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados utilizando a geometria dos fractais.

IV. CONCLUSÕES

O fato da geometria não euclidiana não constar na grade ou não ser estudada nos cursos de formação de professores contribui para o não desenvolvimento da mesma nas escolas de educação básica, nesse sentido o minicurso com a proposta aqui descrita espera-se oferecer diferentes formas de exploração da geometria não euclidiana, a fim de que os professores, em suas ações futuras, possam explorar esse tema, promovendo ações dialógicas em suas práticas pedagógicas. Desta forma, acredita-se estar colaborando para o desenvolvimento do senso crítico, pesquisador e questionador dos estudantes.

V. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos professores do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul.

VI. BIBLIOGRAFIA

- [1] U. D'ambrósio, *Educação Matemática: da teoria á prática*. 16^oe.d. Campinas – São Paulo. 1996.
- [2] S. Lorenzato, *Por que não ensinar geometria?* Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n^o 01, p.3-13, 1995.
- [3] A. M. Kaleff, *Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou Possibilidade?* Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra21.pdf>
- [4] G. Vergnaud, O longo e curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em revista*. Curitiba, Brasil. n. especial 1/2011, p.15-27. 2011. Editora UFPR.
- [5] M. A. Moreira, *A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nesta Área*. Investigações em Ensino de Ciências, v.7, n.1. 2002.
- [6] G. Carvalho, O. Aguiar, *Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático*. Cad. Bras. Ens. Fís., v. 25, n. 2: p. 207-227, ago. 2008.
- [7] A. Bayer, J. da S. Lobo, *O Ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. ACTA SCIENTIAE – v.6 – n.1 – jan./jun. 2004.
- [8] Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática*, Brasília, 1998.
- [9] M. A. Gravina, *Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática*. Porto Alegre: Evangranf, 2012.
- [10] J. M. MORAN, *As mídias na educação*. Disponível em :<http://www3.eca.usp.br/prof/moran/midias_educ.htm>. Acesso em 12 fev. 2015.
- [11] M. A. Gravina, L. Santarosa, *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. Revista Informática na Educação Teoria e prática. UFRGS, v. 1, n. 2 ,1998.
- [12] M. Hohenwarter. *A comprehensive theory of representation for mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior, 1998, n. 7(2), p. 167-181.
- [13] Euclides. *Os Elementos*. Tradução Bicudo, I. São Paulo: Editora UNESP. 2009.