SCIENTIA CUM INDUSTRIA, V. 10, N. 1, PP. 14 — 18, 2022

Medindo distâncias inacessíveis: uma atividade “mão na massa” no Ensino Médio

Taís Menta de Col*, Iago Facchin Schlemmer† e Odilon Giovannini††

Resumo

O presente artigo apresenta a descrição de uma oficina realizada com estudantes do Ensino Médio com o objetivo de mobilizar os conhecimentos relacionados às razões trigonométricas, adquiridos nas aulas de Matemática para aplicá-los em problemas reais envolvendo o cálculo de distâncias, que se assemelham ao cálculo de distâncias inacessíveis, utilizando um equipamento que fornece dados para o cálculo da distância. A oficina, com duração aproximada de 2 h, inicia com uma revisão das leis do seno, cosseno e tangente e semelhança de triângulos. Após, os estudantes reúnem-se em grupos para realizar a atividade de medição. Para isso, um alvo é colocado a uma certa distância e os estudantes, então, fazem a medição com o equipamento. Com os dados obtidos é calculada a distância e, em seguida, com uma trena, mede-se a distância ao alvo para comparar com o valor previsto a partir das razões trigonométricas. A oficina é encerrada com uma discussão em grupo acerca da determinação de distâncias inacessíveis, como as distâncias da Terra ao Sol, aos planetas e às estrelas, utilizando os conhecimentos de trigonometria. Por meio de uma atividade prática percebe-se que ocorre uma mobilização de conhecimentos teóricos que levam os estudantes a engajar-se na realização da atividade e, com isso, auxiliando no entendimento das relações trigonométricas e nas suas aplicações em diversas situações.

Palavras-chave
Distâncias inacessíveis, razões trigonométricas, atividade prática.

Measuring inaccessible distances: a hands-on activity for High School

Abstract

This article presents the description of a workshop held with high school students with the objective of mobilizing knowledge related to trigonometric ratios, acquired in Mathematics classes, to apply them in real problems involving the calculation of distances, which are similar to the calculation of inaccessible distances, using equipment that provides data for distance calculation. The workshop, lasting approximately 2 hours, begins with a review of the laws of sine, cosine and tangent and similarity of triangles. Afterwards, students gather in groups to carry out the measurement activity. For this, a target is placed at a certain distance and the students then measure with the equipment. With the data obtained, the distance is calculated and then, with a measuring tape, the distance to the target is measured to compare with the predicted value from the trigonometric ratios. The workshop ends with a group discussion on determining inaccessible distances, such as distances from the Earth to the Sun, planets and stars, using knowledge of trigonometry. Through a practical activity, it is noticed that there is a mobilization of theoretical knowledge that leads students to engage in carrying out the activity and, with this, helps in understanding trigonometric relations and their applications in different situations.

Keywords
Inaccessible distances, trigonometry relations, practical activity.

I. INTRODUÇÃO

Em diversas situações do cotidiano é preciso prever o tempo que se leva para percorrer certas distâncias a fim de que as atividades do dia a dia possam ser realizadas. Como as distâncias de casa à escola, ao supermercado, à farmácia, por exemplo, são de certa forma estimadas usando as mais diferentes unidades de comprimento, como quadras ou blocos, é possível, por comparação, estimar o tempo aproximado que leva para ir a outros lugares a pé, de ônibus ou de carro.

Para dar conta de um assunto tão importante no cotidiano das pessoas, o objeto de conhecimento “medidas de comprimento”, na unidade temática “Grandezas e Medidas” da área de Matemática da Base Nacional Comum Curricular – BNCC [1], está presente no currículo escolar desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

No ambiente escolar, a contextualização pode ser uma forma de abordagem didática para essa temática pois, segundo os documentos oficiais mais antigos como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [2] e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3] e mais

*Bolsista IC/CNPq; † Bolsista IC/CNPq; ††Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS.
E-mail: tmcol@ucs.br, ifschlemmer@ucs.br, ogiovanj@ucs.br

Data de envio: 01/12/2022
Data de aceite: 21/12/2022

http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v10iss1p14

recentemente como o Guia de Livros Didáticos – Ensino Médio [4] e a BNCC [1], a contextualização é compreendida como um recurso didático para problematizar a realidade vivida pelos estudantes e tem sido incorporada de diferentes maneiras e com diferentes funções, sendo, em grande parte das vezes, utilizada como forma de exemplificação de conceitos ou fenômenos físicos, como espaço de aplicação do conhecimento já desenvolvido ou como elemento de motivação. Assim, a contextualização pode se dar, por exemplo, pelo uso de experimentos como estratégia para abordar diversos temas que fazem parte da vida, da escola e do cotidiano dos estudantes.

Diante do exposto, este artigo descreve uma oficina realizada com estudantes do Ensino Médio na qual se utiliza um equipamento de medição que permite determinar distâncias que simulam técnicas para medir distâncias inacessíveis a partir de razões trigonométricas.

Apesar de sua importância em diversas situações reais, tradicionalmente a trigonometria é apresentada aos estudantes desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos [2, 3]. Neste sentido, visando promover a aprendizagem, é importante envolver as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis.

Em inúmeras situações do dia a dia, como na demarcação de terras ou no cálculo da altura de uma montanha ou prédio, é preciso determinar distâncias ou comprimentos cuja medição direta não é possível. Essas situações podem ser simuladas no ambiente escolar para ensinar trigonometria. Por exemplo, com base nos dados obtidos por meio da utilização do teodolito, um instrumento que mede ângulos, a altura de uma árvore, prédio ou torre, a largura de um rio ou de uma lavoura pode ser medida e, para isso, usa-se razões trigonométricas [5, 6]. Além disso, a trigonometria está presente na Astronomia tornando possível determinar, por exemplo, distâncias inacessíveis como aquelas da Terra aos planetas, ao Sol e de estrelas próximas [7].

Nesta perspectiva, a oficina visa propiciar aos estudantes a utilização de conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas em diversos contextos. Em particular, saber aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno e noções de semelhança, para resolver problemas que envolvem triângulos retângulo, em variados contextos.

A seguir, no presente artigo, apresenta-se uma breve revisão das razões trigonométricas e, depois, descreve-se o material utilizado, o desenvolvimento da oficina, os resultados obtidos e, por fim, apresentam-se as considerações finais.

II. BREVE REVISÃO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria tem origem no estudo das relações das medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo e, em particular, do triângulo retângulo [8].

Um triângulo retângulo é aquele em que um de seus ângulos internos é reto, ou seja, mede 90º, e os outros dois ângulos são agudos, o que significa que têm menos do que 90º.

Em um triângulo retângulo, sabendo-se as medidas de dois lados, ou a medida de um lado mais a medida de um ângulo agudo, é possível calcular a medida dos demais lados e ângulos. O conhecimento da relação entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo é básico no estudo da trigonometria.

Tomando um triângulo retângulo formado pelos segmentos de reta que unem os vértices *A*, *B* e *C*, conforme a Figura 1, o lado oposto ao ângulo reto denomina-se *hipotenusa* e os lados que formam este ângulo chamam-se *catetos*. Os catetos são lados adjacentes ao ângulo reto, que é o ângulo de 90º.

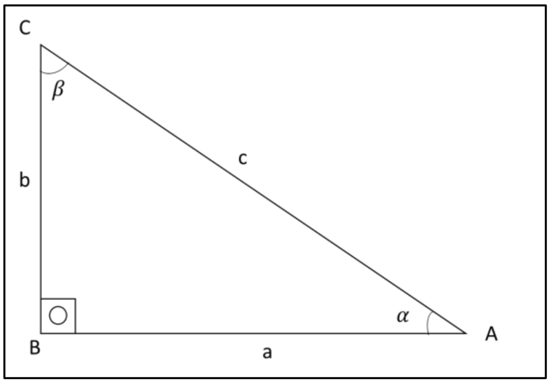

Fig. 1: Triângulo retângulo formado pelos vértices *A*, *B* e *C*, lados *a*, *b* e *c* e ângulos α, β e ângulo reto.

A palavra hipotenusa, de origem grega *hypotenousa*, é formada pelas palavras *hypo*, que significa “debaixo” e *teinein*, que corresponde a “esticado”. Ou seja, hipotenusa é o lado do triângulo retângulo que está estendido em sentido oposto ao ângulo reto.

Os catetos levam esse nome de origem grega *káthetos*, cujo significado reside na expressão “abaixado de maneira reta”. Os catetos podem ser chamados de cateto oposto ou cateto adjacente ao ângulo considerado, dependendo da posição do cateto em relação a este ângulo.

Vale ressaltar que para identificar a medida de algum elemento (lado ou ângulo) de um triângulo retângulo, são necessárias pelo menos outras duas medidas, dentre as quais necessariamente a medida de um de seus lados.

A partir do triângulo retângulo da Figura 1 pode-se definir o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α, da seguinte forma:

- Seno do ângulo α:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{c}$$

- Cosseno do ângulo α:

$$cos\ \alpha = \frac{a}{c}$$

- Tangente do ângulo α:

$$tan\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Logo, conhecendo essas razões, se um triângulo retângulo tem os mesmos ângulos internos que outro, pode-se inferir que esses triângulos são proporcionais, como os dois triângulos da Figura 2. Sendo assim, se a medida de um dos lados desse triângulo e o valor de um se seus senos, cossenos, ou tangente é conhecida pode-se descobrir o valor de outro lado.

As razões trigonométricas também são importantes no caso da sobreposição de triângulos, como nos triângulos da Figura 2. Ao aplicar as propriedades apresentadas anteriormente, a tangente do ângulo entre os lados A e C é a mesma do ângulo entre os lados a e c.

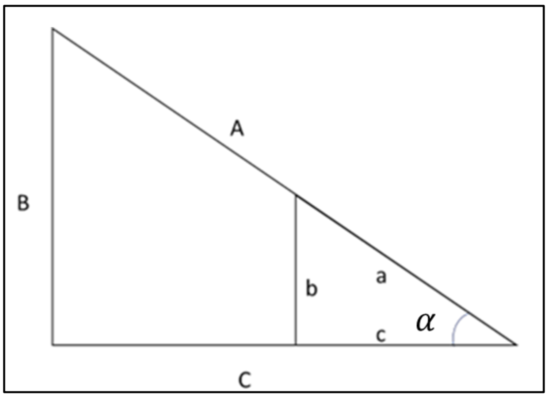

Fig. 2: Sobreposição dos triângulos *ABC* e *abc*. Os triângulos tem em comum o mesmo ângulo α.

Com isso, a tangente do ângulo α é:

$$tan\ \alpha\ = \frac{b}{c}\ \text{e}\ tan\ \alpha = \frac{B}{C}$$

Logo, chega-se na seguinte relação entre os lados dos dois triângulos sobrepostos:

$$\frac{b}{c} = \frac{B}{C} \tag{1}$$

A equação (1) permite, por exemplo, determinar o cateto C se são conhecidos os catetos b e c do triângulo menor e o cateto B do maior. Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado para o cosseno e seno.

A seguir, são descritos os materiais utilizados para a realização da atividade de medição visando a determinação de distâncias inacessíveis.

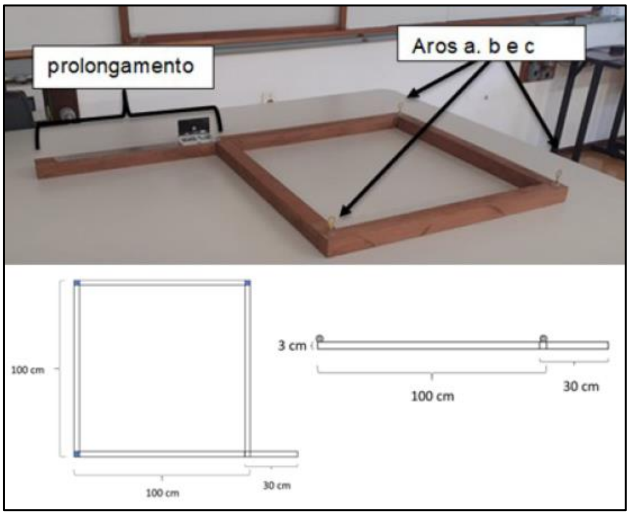

Fig. 3: Topo: equipamento de medição. Embaixo: dimensões do equipamento de medição em vista superior (à esquerda) e lateral (à direita).

III. MATERIAIS

O material necessário para a realização da atividade de medição para o cálculo de distâncias inacessíveis é composto por uma trena (de 5 a 10 m) e um equipamento de medição construído pelos autores, descrito a seguir.

O equipamento de medição é um quadrado feito de madeira com lado de 1 m (100 cm) e com um prolongamento em um dos lados de cerca de 30 cm. Três aros são colocados nos vértices do quadrado, exceto no lado que possui o prolongamento, como na Figura 3.

A lente móvel deve ser posicionada sobre o prolongamento, como mostra a Figura 4. A medida de sua abertura deve ser igual à dos aros utilizados no equipamento de medição.

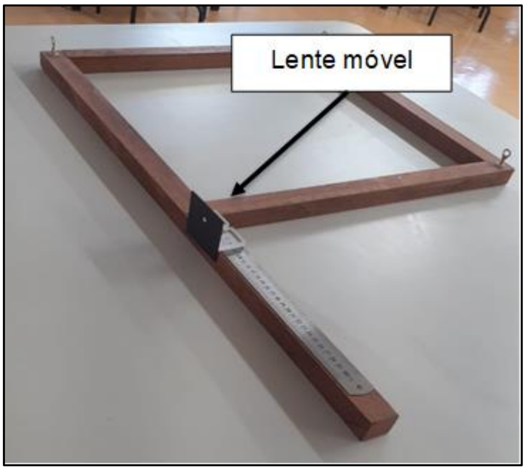

Fig. 4: Posicionamento da lente móvel (um orifício na placa preta) colocada no equipamento de medição.

No prolongamento de um dos lados do quadrado, onde está a lente móvel, é colocada uma régua para possibilitar a medição do deslocamento da lente móvel em relação ao vértice do quadrado.

Na seção seguinte, apresenta-se o desenvolvimento da oficina com uma parte dedicada a retomada dos conceitos e definições trigonométricas e a outra para a realização da atividade prática.

IV. DESENVOLVIMENTO

Para a realização da oficina estima-se um tempo de aproximadamente 2 horas.

Fig. 5: Momento inicial da oficina com exposição oral das propriedades trigonométricas do triângulo retângulo.

A oficina inicia com uma exposição oral de aproximadamente 20 minutos na qual são apresentadas as propriedades gerais do triângulo retângulo, como as leis do seno, cosseno e tangente, sobreposição de triângulos e triângulos semelhantes (Figura 5).

Após, é apresentado um problema em que se aplica uma razão trigonométrica para determinar a altura de um prédio. O tempo estimado para a resolução do problema seguida de uma discussão do resultado com os estudantes é de 10 a 15 minutos.

Problema: Imagine-se a uma certa distância d de um prédio de altura h, conforme está na Figura 6. Utilizando um instrumento para a medição de ângulos (teodolito, transferidor, entre outros) pode-se medir o ângulo α. Conhecendo os valores de d e α, determine a altura h do prédio.

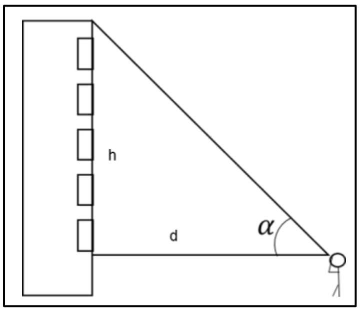

Fig. 6: Desenho esquemático da situação apresentada no problema. O observador está a uma distância d do prédio de altura h. O ângulo α é medido pelo observador.

Resposta: Observa-se na Figura 6 que a distância d e altura h são os catetos de um triângulo retângulo. Então, usando a relação trigonométrica que descreve a tangente do ângulo α (o qual foi medido anteriormente), calcula-se a altura h do prédio:

$$tan\ \alpha = \frac{h}{d} \text{ e } h = d\ tan\ \alpha$$

A resolução do problema é desenvolvida com a participação dos estudantes. Em seguida, uma demonstração simples é realizada para determinar a altura do pé direito da sala de aula: com um transferidor o professor ou um aluno mede o ângulo e com uma trena a distância à parede. Com boa precisão é possível calcular a altura da parede.

Em seguida, no tempo restante da oficina, os estudantes reuniram-se em grupo para determinar a distância de um alvo colocado em uma das paredes da sala, enquanto o equipamento de medição estava próximo da parede no lado oposto do alvo (Figura 7).

Fig. 7: Estudantes utilizando o equipamento de medição.

O modo de "funcionamento" do equipamento para calcular a distância d do alvo, distância do ponto A ao ponto B, está esquematizado na Figura 8. A lente móvel deve ser deslocada sobre o prolongamento do quadrado e colocada em uma posição alinhada com o ponto B e o vértice do quadrado. A distância da lente móvel no prolongamento é chamada de z, cujo valor é lido na régua que está sobre o prolongamento (Figura 4).

Como pode se observar na Figura 8, o ângulo α é igual para os dois triângulos retângulos sobrepostos: um formado pelos catetos z e L e o outro formado pelos catetos $z+L$ e d. Assim, como $L = 1$ m, é possível calcular a distância d, do ponto A ao ponto B, medindo o valor de z através do equipamento e utilizando a igualdade (1):

$$\frac{d}{L+z} = \frac{L}{z}$$

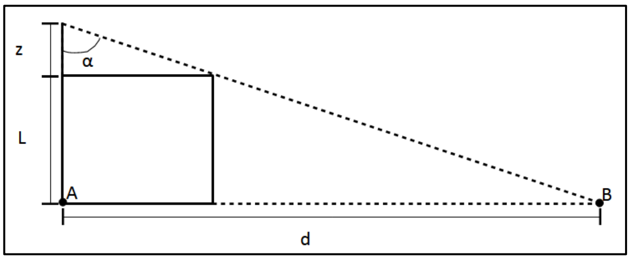

Fig. 8: Desenho esquemático do uso do equipamento de medição (linhas sólidas) para a determinação da distância d entre A e B (alvo). O comprimento z é determinado ajustando a lente móvel do equipamento.

Após cada grupo realizar a medição do valor de z, os estudantes, em seus grupos, usaram as razões trigonométricas para calcular a distância d. As diferenças percentuais entre o valor calculado e o valor medido da distância ao alvo (6,24 m) foram da ordem de 5%, causadas basicamente pela dificuldade no alinhamento da lente móvel com o alvo e, consequentemente, na leitura da posição da lente na régua.

Os estudantes ficaram bastante empolgados com a atividade pois puderam aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas reais. Motivados pelo ótimo resultado, os estudantes utilizaram o equipamento para realizar medições de outras distâncias escolhidas por eles mesmos, ou na sala de aula ou no corredor do prédio.

Para finalizar a oficina, os estudantes reuniram-se em um grande círculo e discutiu-se acerca de distâncias inacessíveis que podem ser determinadas com essa técnica. Entre as várias situações descritas, a que mais despertou interesse foi a determinação da distância às estrelas e galáxias. Um tema instigante, certamente, para uma próxima oficina!

V. Considerações Finais

A proposta da oficina foi abordar os conceitos de trigonometria de uma forma dinâmica e com aplicações dos elementos do triângulo retângulo em situações reais, como por exemplo, no cálculo de distâncias que simulam distâncias inacessíveis.

Os estudantes, na sua maioria, tiveram participação efetiva em todos momentos da oficina, questionando, debatendo, medindo e calculando, indicando que atividades "mão na massa" são recursos didáticos que podem mediar os processos de ensino e de aprendizagem, pois fomentam o protagonismo dos estudantes, desfiando-os diante de novas situações, e retomando aquilo que já aprenderam para resolverem problemas cognitivamente instigantes e relevantes.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos organizadores do X SECIMSEG pelo espaço de discussão e reflexão, aos professores do PPGECiMa pelas valiosas sugestões na redação final do artigo e ao CNPq pelo apoio financeiro através da chamada MCTIC/CNPq Nº 05/2019 – PROGRAMA CIÊNCIA NA ESCOLA – Ensino de Ciências na Educação Básica.

VI. Referências Bibliográficas

[1] Brasil, *Base Nacional Comum Curricular*. Secretária de Educação Básica. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

[2] Brasil, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1999.

[3] Brasil, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Secretaria de Educação Básica. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2006.

[4] Brasil, *PNLD 2018:Física – guia de livros didáticos – Ensino Médio*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

[5] J. M. Sousa. *Funções trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis*. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2017.

[6] G. Gonçalves, E. B. Ribeiro, G. D. T. Karoleski and K. B. Mello. *Uma proposta de ensino de relações trigonométricas em ângulos notáveis por meio do material concreto prédio trigonométrico*. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 16, p. 01-17, jan./dez., 2021

[7] F. Catelli, O. Giovannini and P. Hoffmann. *Um problema didático: como determinar ângulos de paralaxe trigonométrica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 1, e1306, 2018.

[8] J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni Júnior and P. R. C. de Sousa. *Prisma Matemática: geometria e trigonometria: Ensino Médio*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.